Apellido: .... Nombre: .... Legajo: ....

1er Parcial de **MATEMATICA SUPERIOR**

12 de mayo de 2015

TEMA: **48**

1		2	3			4	5	Nota Final
1.5 p.	1.5 p.	2 p.	1 p.	1 p.	1 p.	2 p.	2 p.	

LA NOTA ES N = X – 2 SIENDO X LA SUMA DE PUNTOS. TIEMPO: 90 MINUTOS

Ejercicio n° 1

a) Resuelva en C (complejos) la ecuación: $z^6 + 64\,j = 0$

b) De las raíces w anteriores, indique si alguna cumple que $|\ln(w) - 2 - 3\,j\,| < 1$

Ejercicio n° 2:

Desarrolle en Serie Trigonométrica de Fourier la función: $f(t)=\begin{cases} t+3 & t\in(0\,;2) \\ 7-t & t\in(2\,;4)\end{cases} \wedge f(t)=f(t+4)$

Ejercicio n° 3:

Indique V o F justificando:

a) El sistema cuya transferencia es $G(s) = \dfrac{3(s^2 - 6s+5)}{(s^2-1)(s^2+8s+20)}$ es estable.

b) La Transformada de Laplace de $f(t) = (t\text{-}4)^2$ con $t>0$ es $F(s) = \dfrac{2}{s^3} \bullet e^{-4s}$

c) El fasor asociado a la función $f(t) = 2\cos(4t + 3\dfrac{\pi}{4})$ es $F = \sqrt{2} - j\sqrt{2}$

Ejercicio n° 4:

Calcule la transformada Z de $x(n) = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ es impar} \\ 3^{-n} & \text{si } n \text{ es par}\end{cases}$ e indique su región de convergencia.

Ejercicio n° 5:

Resuelva por Transformada de Laplace:

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t} \bullet \text{sen}(t) \quad \text{con } y(0) = 0 \wedge y'(0) = 1$$

RESPUESTAS PARCIAL 1 TEMA 48

Ejercicio 1:

a) Las raíces son: [2 ; $\pi/4$], [2 ; $7\pi/12$], [2 ; $11\pi/12$], [2 ; $5\pi/4$], [2 ; $19\pi/12$]

y [2 ; $23\pi/12$]

b) Ninguna cumple.

Ejercicio 2:

$Sf(t) = 4 - 8/\pi^2 \sum (2k+1)^{-2} \cos((2k+1)\, \pi/2\, t)$

Ejercicio 3:

a) V
b) F
c) F

Ejercicio 4:

$$X(z) = \frac{2z}{z^2-4} + \frac{9z^2}{9z^2-1} \quad \text{en } |z| > 2$$

Ejercicio 5:

$y(t) = 1/3\, e^{-t}\, (\mathrm{sen}(t) + \mathrm{sen}(2t))$

tema 48

12-5-15

Mat. Sup. 1º parcial

1 a) Resuelva en C (complejos) la ecuación: $z^6+64j=0$

$$z^6=-64j=\left[64;\tfrac{3}{2}\pi\right] \qquad w_k=\left[\sqrt[6]{64};\frac{3\pi}{12}+\frac{2k\pi}{6}\right]$$

$$w_k=\left[2;\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}\right]$$

$$w_0=\left[2;\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}+\sqrt{2}j$$

$$w_1=\left[2;\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right]$$

$$w_2=\left[2;\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi\right]$$

$$w_3=\left[2;\frac{\pi}{4}+\pi\right]$$

$$w_4=\left[2;\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}\pi\right]$$

$$w_5=\left[2;\frac{\pi}{4}+\frac{5}{3}\pi\right]$$

b) De las raices anteriores, indique si alguna cumple que $|\ln(w)-2-3j|<1$

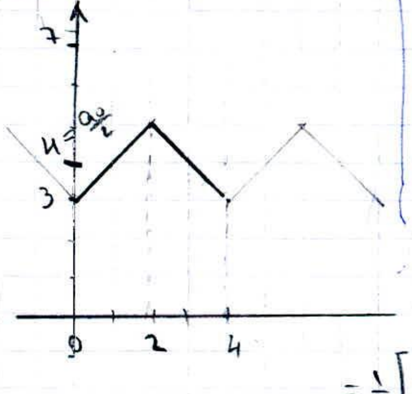
ninguna lo cumple $\boxed{F}$

$$\ln(w)=\ln\left[2;\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}\right]=\ln(2)+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}\right)j$$

$$\to |\ln(w)-2-3j|=|\ln(w)-(2+3j)|=\sqrt{\underbrace{(\ln(2)-2)^2}_{>1}+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}-3\right)^2}>1 \quad \forall k\in \mathbb{Z}$$

---

2 Desarrolle en Serie trigonométrica de Fourier la función $f(t)=\begin{cases} t+3 & t\in(0,2)\\ 7-t & t\in(2,4)\end{cases}$ $\quad f(t)=f(t+4)$



$$T=4 \to L=2 \qquad \omega=\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_0^4 f(t)\,dx=\frac{2}{4}\int_0^2 t+3\,dt=\boxed{4=\frac{a_0}{2}}$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_0^4 f(t)\cos(n\omega t)\,dt=\frac{1}{2}\left[\int_0^2 (t+3)\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right)dt+\int_2^4 (7-t)\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^2 t\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt+\int_0^2 3\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt+\int_2^4 7\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)dt-\int_2^4 t\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt\right]=$$

$a=\frac{n\pi}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\cos(\frac{n\pi}{2}t)}{\frac{n^2\pi^2}{4}}+\frac{\overbrace{t\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2}t)}^{0}}{\frac{n\pi}{2}}+3\,\frac{\overbrace{\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2}t)}^{0}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Bigg|_0^2+\left(\frac{\overbrace{7\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2}t)}^{0}}{\frac{n\pi}{2}}-\frac{\cos(\frac{n\pi}{2}t)}{\frac{n^2\pi^2}{4}}-\frac{\overbrace{t\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{2}t)}^{0}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Bigg|_2^4\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n}-1-\overbrace{\cos(n2\pi)}^{1}+\overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n}\right]=\frac{2}{n^2\pi^2}\left(2\cdot(-1)^n-2\right)=\frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)$$

si n es par $\to a_n=0$, si n es impar $\to \boxed{a_n=-\frac{8}{n^2\pi^2}} \to n=2k+1$

$$\boxed{f(t)=4-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}t\right]}$$

③ Indique V o F justificando:

a) El sistema cuya transferencia es $G(s) = \dfrac{3(s^2-6s+5)}{(s^2-1)(s^2+8s+20)}$ es estable $\boxed{V}$

$$G(s) = \frac{3(s-5)\cancel{(s-1)}}{(s+1)\cancel{(s-1)}\left[(s+4)^2+4\right]} \rightarrow \text{Polos: } -1;\ -4 \pm 2j \rightarrow \text{es verdadero}$$

b) La transformada de Laplace de $f(t) = (t-4)^2$ con $t>0$ es $F(s) = \dfrac{2}{s^3} \cdot e^{-4s}$ $\boxed{F}$

Es falso porque tiene desplaz. en el tiempo, y no coincide el inicio del tiempo ($t>0$) y el despl. (-4), habría que truncar la función.

c) El fasor asociado a la función $f(t) = 2\cos\left(4t + \frac{3\pi}{4}\right)$ es $F = \sqrt{2} - \sqrt{2}j$

$$F = \left[2; \tfrac{3}{4}\pi\right] = 2\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + 2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)j = -\sqrt{2} + \sqrt{2}j \rightarrow \boxed{F}$$

---

④ Calcule la transformada Z de $x(n) = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ es impar} \\ 3^{-n} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$ e indique su región de convergencia.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^{2k+1} + \left(\frac{1}{3z}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{z}\left(\frac{4}{z^2}\right)^k + \left(\frac{1}{9z^2}\right) = \frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{z^2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{9z^2}} =$$

$$= \frac{2}{\cancel{z}}\cdot\frac{z^{\cancel{2}}}{z^2-4} + \frac{9z^2}{9z^2-1} \rightarrow \boxed{X(z) = \frac{2z}{z^2-4} + \frac{9z^2}{9z^2-1}, \quad |z|>2}$$

Módulos: $\left|\frac{4}{z^2}\right| < 1 \rightarrow 4 < z^2 \rightarrow \boxed{|z|>2}$; $\left|\frac{1}{9z^2}\right| < 1 \rightarrow \frac{1}{9} < |z^2| \rightarrow \boxed{|z| > 1/3}$

---

⑤ Resuelva por transformada de Laplace: $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t}\,\mathrm{sen}(t)$

$y(0)=0$

$y'(0)=1$

$$s^2Y(s) - s\overset{0}{y(0)} - \overset{1}{y'(0)} + 2\left[sY(s) - \overset{0}{y(0)}\right] + 5Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$$Y(s)(s^2+2s+5) = \frac{1}{(s+1)^2+1} + 1 = \frac{1+s^2+2s+2}{(s+1)^2+1} = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+2s+3}{\left[(s+1)^2+1\right]\left[(s+1)^2+4\right]} = \frac{As+B}{\underbrace{(s+1)^2+1}_{s^2+2s+2}} + \frac{Cs+D}{\underbrace{(s+1)^2+4}_{s^2+2s+5}}$$

$$A(s^3+2s^2+5s) + B(s^2+2s+5) + C(s^3+2s^2+2s) + D(s^2+2s+2) = s^2+2s+3$$

$$\begin{array}{l} s^3 \\ s^2 \\ s \\ \# \end{array}\begin{cases} A + C = 0 \rightarrow \boxed{C=-A} \\ 2A+B+2C+D = 1 \\ 5A+2B+2C+2D = 2 \\ 5B+2D = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cancel{2A}+B-\cancel{2A}+D=1 \\ 5A+2B-2A+2D=2 \\ 5B+2D=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B+D=1 \\ 3A+2B+2D=2 \\ 5B+2D=3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} A=0 \\ B=1/3 \\ C=0 \\ D=2/3 \end{array}$$

$$Y(s) = \frac{1/3}{(s+1)^2+1} + \frac{2/3}{(s-1)^2+4} \rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(t)\,e^{-t} + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(2t)\,e^{-t}}$$